Θεώρημα Μέσης τιμής (ΘΜΤ)

1) Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} 2x^2+5x+6, & x\leq -1 \\ 3x^2+7x+7, & x>-1 \end{cases}$

α. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το ΘΜΤ για την f στο διάστημα $[-3,1]$

β. ΝΔΟ $\exists \xi \in (-3,1)$ ώστε $f'(\xi)=2$

γ. Να βρείτε μια τιμή του ξ που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση

ΛΥΣΗ

α. • $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 3x^2+7x+7 = 3(-1)^2+7(-1)+7 = 3$

• $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 2x^2+5x+6 = 2(-1)^2+5(-1)+6 = 3$

Άρα, η f συνεχής στο -1 με $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 3$

• $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x^2+7x+7-3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x^2+7x+4}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{\cancel{(x+1)}(3x+4)}{\cancel{x+1}} = 1$

• $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x^2+5x+6-3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2x^2+5x+3}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{\cancel{(x+1)}(2x+3)}{\cancel{x+1}} = 1$

Άρα, η f παραγωγίσιμη στο 1 με $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = f'(-1)$

$f'(x)=\begin{cases} 4x+5, & x\leq -1 \\ 6x+7, & x>-1 \end{cases}$

Άρα, ισχύει το ΘΜΤ.

β) $f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(-3)}{1+3} = \dfrac{17-9}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$

γ) • στο $[-3,-1]$:

$\exists\, \xi_1 \in (-3,-1)$ ώστε $f'(\xi_1) = 2 \Rightarrow 4\xi_1 + 2 = 2 \Rightarrow \xi_1 = -\frac{3}{4}$ Απορ.

γιατί $-1 < -\frac{3}{4}$

• στο $[-1,1]$:

$\exists\, \xi_2 \in (-1,1)$ ώστε $f'(\xi_2) = 2 \Rightarrow 6\xi + 7 = 2 \Rightarrow \xi_2 = -\frac{5}{6}$ Δεκτή

2) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(1) = 2\alpha$

$f(2) = 4\alpha$, $f(4) = 6\alpha$ και $f(7) = -3\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

ΝΔΟ $\exists\, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1,7)$ διαφορετικά ανά δύο έτσι ώστε:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$$

ΛΥΣΗ

Αναλύουμε το διάστημα $[1,7]$ σε διάφορα υποδιαστήματα

• $[1,2]$: i) Η f συνεχής στο $[1,2]$

ii) Η f παραγωγ. στο $(1,2)$

Άρα $\exists\, \xi_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(2)-f(1)}{1} = 2\alpha$

• $[2,4]$: i) Η f συνεχής στο $[2,4]$

ii) Η f παραγωγ. στο $(2,4)$

Άρα, $\exists\, \xi_2 \in (2,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(4)-f(2)}{2} = \alpha$

• $[4,7]$: i) Η f συνεχής στο $[4,7]$

ii) Η f παραγωγ. στο $(4,7)$

Άρα, $\exists\, \xi_3 \in (4,7)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi_3) = \dfrac{f(7)-f(4)}{3} = -3\alpha$

Άρα $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 2\alpha + \alpha - 3\alpha = 0$

3) Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = 3\alpha - \beta$
$f(\beta) = \alpha + \beta$. ΝΔΟ $\exists \xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε
$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4$

ΛΥΣΗ

Αναγκαστικά το $[\alpha, \beta]$ θα το σπάσουμε σε 2 υποδιαστήματα

- $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$:

1) f συνεχής $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$
2) f παραγωγ. $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\exists \xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$: $\boxed{f'(\xi_1) = \dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}}$

- $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$:

1) f συνεχής $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$
2) f παραγωγ. $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

$\exists \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \frac{\cancel{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} - f(\alpha) + f(\beta) - \cancel{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}{\frac{\beta-\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{-3\alpha + \beta + \alpha + \beta}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = \frac{2(-2\alpha + 2\beta)}{\beta - \alpha} = 4\frac{\cancel{(\beta-\alpha)}}{\cancel{\beta-\alpha}} = 4$$

4) Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(1) = 2$, $f(3) = 6$

ΝΔΟ α) $\exists \xi \in (1,3)$: $f(\xi) = 8 - 3\xi$

β) $\exists x_1, x_2 \in (1,3)$ με $x_1 \neq x_2$: $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 4$

ΛΥΣΗ

α) $f(x) + 3\xi - 8 = 0$

θέτω $g(x) = f(x) + 3\xi - 8$

- g συνεχής στο $[1,3]$
- $g(1) = f(1) + 3 - 8 = -3 < 0$
  $g(3) = f(3) + 9 - 8 = 7 > 0$

Άρα, από Θ. Bolzano $\exists \xi \in (1,3)$ τω $f(\xi) = 8 - 3\xi$

β) Σπάω το $(1,3)$ στα $(1,\xi)$ και $(\xi,3)$

- ΘΜΤ στο $(1,\xi)$
$\exists x_1 \in (1,\xi)$: $f'(x_1) = \dfrac{f(\xi)-f(1)}{\xi-1} = \dfrac{6-2\xi}{\xi-1}$

- ΘΜΤ στο $(\xi,3)$
$\exists x_2 \in (\xi,3)$: $f'(x_2) = \dfrac{f(3)-f(\xi)}{3-\xi} = \dfrac{2\xi-2}{3-\xi}$

$f'(x_1)\cdot f'(x_2) = \dfrac{2\cancel{(3-\xi)}}{\cancel{\xi-1}} \cdot \dfrac{2\cancel{(\xi-1)}}{\cancel{3-\xi}} = 4$

5) Δίνεται f συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγ. $(2,6)$
με $f(2)=-6$ και $1 < f'(x) < 2$ $\forall x \in (2,6)$.
ΝΔΟ $|f(6)| < 2$

ΛΥΣΗ

ΘΜΤ στο $[2,6]$
$\exists x_0 \in (2,6)$: $f'(x_0) = \dfrac{f(6)-f(2)}{6-2} = \dfrac{f(6)+6}{4}$

Αλλά $1 < f'(x) < 2 \Rightarrow 1 < f'(x_0) < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 < \dfrac{f(6)+6}{4} < 2 \Rightarrow 4-6 < f(6) < 8-6 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2 < f(6) < 2 \Rightarrow |f(6)| < 2.$

6) Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(-5) = -2$, $f(1) = 4$

ΝΔΟ

α. Υπάρχει $x_0 \in (-5, 1)$, ώστε $f(x_0) = 1$

β. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-5, 1)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$$

ΛΥΣΗ

α. $f(x) = 1 \Rightarrow f(x) - 1 = 0$

Θεωρούμε $\varphi(x) = f(x) - 1$

- φ συνεχής στο $[-5, 1]$
- $\varphi(-5) = f(-5) - 1 = -2 - 1 = -3 < 0$
  $\varphi(1) = f(1) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$

Άρα, υπάρχει $x_0 \in (-5, 1)$ ώστε: $\varphi(x_0) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_0) = 1$

(Ή μέσω ΘΕΤ για $f: [-5, 1] \to [-2, 4]$)

β. ▸ Στο $[-5, x_0]$:

- f συνεχής στο $[-5, x_0]$
- f παραγωγίσιμη στο $(-5, x_0)$

Από, ΘΜΤ $\exists \xi_1 \in (-5, x_0)$: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_0) - f(-5)}{x_0 + 5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{x_0 + 5}{f(x_0) - f(-5)} = \frac{x_0 + 5}{3}$$

▸ Στο $[x_0, 1]$:

- f συνεχής στο $[x_0, 1]$
- f παραγωγίσιμη στο $(x_0, 1)$

Από, ΘΜΤ $\exists \xi_2 \in (x_0, 1)$: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{1 - x_0}{f(1) - f(x_0)} = \frac{1 - x_0}{3}$$

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{x_0 + 5}{3} + \frac{1 - x_0}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

7) Δίνεται η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2 φορές παραγωγίσιμη και
$f(1)=\alpha+2\beta$ και $f(2)=2\alpha+3\beta$ και $f(3)=3\alpha+4\beta$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
ΝΔΟ $\exists\, \xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε : $f''(\xi)=0$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θα σπάσουμε το διάστημα $(1,3)$ στα $(1,2)$ και $(2,3)$

- Η f συνεχής στο $[1,2]$ και $[2,3]$
- Η f παραγωγ. στο $(1,2)$ και $(2,3)$

Άρα, $\exists\, x_1\in(1,2)$ και $x_2\in(2,3)$ ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(2)-f(1)}{1}=2\alpha+3\beta-\alpha-2\beta=\alpha+\beta$$

$$f'(x_2)=\frac{f(3)-f(2)}{1}=3\alpha+4\beta-2\alpha-3\beta=\alpha+\beta$$

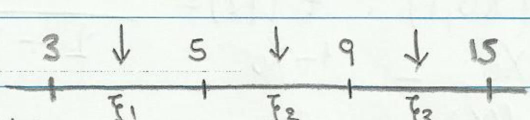
Στο $\Delta[1,3]$:

- f' συνεχής στο $[1,3]$
- f' παραγωγ. στο $(1,3)$
- $f'(x_1)=f'(x_2)=\alpha+\beta$

Άρα, από Θ.Rolle $\exists\, \xi\in(1,3)$ ώστε:
$$f''(\xi)=0$$

8) Δίνεται παραγωγίσιμη $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όπου ισχύει:
$f(15)=f(3)+8$ ΝΔΟ $\exists\, \xi_1,\xi_2,\xi_3\in(3,15)$ διαφορετικά ανά δύο, τέτοιο ώστε: $f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)+3f'(\xi_3)=4$

<u>ΛΥΣΗ</u>



Εφαρμόζουμε ΘΜΤ
στα διαστήματα $[3,5]$, $[5,9]$, $[9,15]$ αντίστοιχα:

- $f'(\xi_1)=\dfrac{f(5)-f(3)}{2}=\dfrac{f(5)-f(15)+8}{2}$
- $f'(\xi_2)=\dfrac{f(9)-f(5)}{4}$
- $f'(\xi_3)=\dfrac{f(15)-f(9)}{6}=\dfrac{f(3)+8-f(9)}{6}=\dfrac{f(3)-f(9)+8}{6}$

Άρα, $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) =$

$$= \frac{f(5)-f(15)+8}{2} + \cancel{2}\,\frac{f(9)-f(5)}{\cancel{4}} + \cancel{3}\,\frac{f(3)-f(9)+8}{\cancel{6}} =$$

$$= \frac{\cancel{f(5)}-f(15)+8+\cancel{f(9)}-\cancel{f(5)}+f(3)-\cancel{f(9)}+8}{2} =$$

$$= \frac{f(3)-f(15)+16}{2} = \frac{-8+16}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

9) Για κάθε $\alpha,\beta \in (0,\frac{\pi}{2})$ με $\alpha \le \beta$.

Νδο

$$\frac{\beta-\alpha}{\eta\mu^2\beta} \le \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta \le \frac{\beta-\alpha}{\eta\mu^2\alpha}$$

ΛΥΣΗ

$\alpha \le \beta$

1) $\alpha=\beta$ $\quad 0 \le 0 \le 0$ ισχύει

2) $\alpha<\beta$

$\beta-\alpha>0$

$$\frac{1}{\eta\mu^2\beta} \le \frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{\beta-\alpha} \le \frac{1}{\eta\mu^2\alpha}$$

$$\frac{1}{\eta\mu^2\beta} \ge \frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{\alpha-\beta} \ge \frac{1}{\eta\mu^2\alpha}$$

$$f'(\alpha) \le f'(\xi) \le f'(\beta)$$

Άρα, μιλάμε για μια συνάρτηση με τύπο $f(x)=\varepsilon\varphi x$ και $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

άρα, $\alpha<\xi<\beta \Rightarrow \eta\mu\alpha < \eta\mu\xi < \eta\mu\beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} < -\frac{1}{\eta\mu^2\xi} < -\frac{1}{\eta\mu^2\beta} \Rightarrow -\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} < \frac{\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha} < -\frac{1}{\eta\mu^2\beta}$$

Άρα, η f παραγωγίσιμη στο (α,β), f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ $\quad f'(\xi) = \frac{\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha}{\beta-\alpha}$.

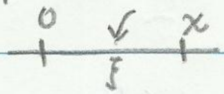
10) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και $f(0)=2$, $f'(0)=1$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. ΝΔΟ $\forall x \geq 0$ ισχύει ότι:

$$x+2 \leq f(x) \leq x f'(x)+2$$

ΛΥΣΗ

Αφού $f:[0,+\infty)$

- Αν $x=0$, $2 \leq f(0) \leq 2$ ισχύει
- Αν $x>0$



- f συνεχής στο $[0,x]$
- f παραγωγ. στο $(0,x)$

$\exists \xi \in (0,x)$ ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{f(x)-2}{x}$

Με $0<\xi<x$, $f' \uparrow$ $\Rightarrow$ $f'(0)<f'(\xi)<f'(x) \Rightarrow 1 < \dfrac{f(x)-2}{x} < f'(x) \Rightarrow +x \neq 0$

$$\Rightarrow x < f(x)-2 < f'(x)\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2 < f(x) < f'(x) < xf'(x)+2$$